関数方程式と準楕円性(函数方程式とその応用)

堤, 陽

数理解析研究所講究録
499巻 1983年 18-32

関数方程式 と 準楕円性

岡山大学教養部 堤 陽 (Akira Tsutsumi)

1、序 角谷－南雲 [7] と J. Walsh [15] は独立に次の定理を証明した.

定理 $f(x)$ は連続な実数値関数で、平均値型関数方程式

(1.1) $$\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{k} f(x+\theta^j t) = f(x) \quad ,$$

ここで, x, t は任意の複素数, $\theta = \exp(2\pi i/k)$, を満すものとする、このとき $f(x)$ は高々 $k-1$ 次の harmonic polynomial である.

このように関数方程式を解く場合に、それを満す弱いなめらかさをもつ解が実は強いなめらかさをもつことがある. たとえば、すべての連続解を求めるのに、解の可微性が先に得られていれば、微分という手段を用い得る, (see [1]). このノートの目的は、ある種の関数方程式の弱い regularity をもつ解の C^∞ 性を証明することにある.

方法については、[7], [15] においては (1.1) を調和積分, すなわち積分方程式

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x+e^{i\varphi})\,d\varphi = f(x)$$

へ変換して，$f(x)$ の調和性を導いている．一方，ここでは，(1.1) を偏微分方程式に変換する方法を用いる．この観点に立てば，(1.1) の型をより一般にした方程式を扱うことが可能になる．考え方を示すために (1.1) を偏微分方程式へ変換する手順を示す．

$x = x_1 + i x_2$，$\theta^j = \theta_1^{(j)} + i\theta_2^{(j)}$ とおき，$t \in \mathbb{R}$（実数）に制限し，$f(x)$ の (1.1) の超関数の意味の解とすると，(1.1) の両辺に $\frac{d^2}{dt^2}$ を作用させることが出来て

$$\sum_{j=1}^{k}(\theta_1^{(j)}+i\theta_2^{(j)})^2 f''(x+\theta^j t) = \sum_{j=1}^{k}(\theta_1^{(j)}\partial_{x_1}+\theta_2^{(j)}\partial_{x_2})^2 f(x+\theta^j t)$$
$$= 0.$$

$t=0$ とおくと $f(x)$ を未知関数とする偏微分方程式

(1.2) $\quad P(\partial_x)f(x) = \sum_{j=1}^{k}(\theta_1^{(j)}\partial_{x_1}+\theta_2^{(j)}\partial_{x_2})f(x) = 0$.

三角関数の公式より

$$\sum_{j=1}^{k}(\theta_1^{(j)})^2 = \sum_{j=1}^{k}(\theta_2^{(j)})^2 \neq 0,\ \sum_{j=1}^{k}\theta_1^{(j)}\theta_2^{(j)} = 0$$

を用いると，(1.2) は

(1.3) $\quad \Delta_x f(x) = 0$,

ここで $\Delta_x = \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2$ ，と同値である．これより $f(x)$ は調和関数（したがって C^∞）であることが得られる．

上の解析と偏微分方程式の解の C^∞ 性（準楕円性）を考え合わせると次の間が得られる．

(1.3) において，Δ_x の代りに準楕円型偏微分作用素 $P(x, \partial_x)$ をとることが可能なように (1.1) をより一般な型の関数方程式を定めること．第2節で定理を述べる．第3節で準楕円性の十分条件を引用する．第4節で定理の応用例および問題を提示する．これらの結果の一部は [13]，[14] で発表されている．また (1.1) の積分型への拡張

$$\int f(x+ty)\,d\mu(y) = f(x)$$

は [3]，[4]，[16] で扱われている．

2．定理　$x, y, \xi, \eta \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^r$, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_r)$ $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $|\beta| = \beta_1 + \cdots + \beta_r$，とする．$\xi^\alpha$, ∂_x^α は通常の用法とし，$D_x^\alpha = (-i)^{|\alpha|}\partial_x^\alpha$，$D_t^\beta$ についても同様とする．超関数 $T \in \mathcal{D}'$ が class C 又は L^1_{loc} であるとは連続関数 f 又は locally integrable function f があって

$$(T, \phi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)\,dx, \quad \phi \in \mathcal{D}.$$

パラメーター付の超関数も考える．$\omega \subseteq \mathbb{R}^r$，$\psi : \mathbb{R}^n \times \omega \longrightarrow \mathbb{R}$ とし，t を固定すれば $\psi_t = \psi(x, t) \in \mathcal{D}$ で $\psi_t : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$．これに対して，$T \in \mathcal{D}'$

$$\gamma(t) = (T, \psi_t) = (T(x), \psi(x,t))_x.$$

$h_j(x,t) = (h_{j1}(x,t), \cdots, h_{jn}(x,t))$，$\partial_t^\beta h_j(x,t) = (\partial_t^\beta h_{j1}(x,t), \cdots,$

$\partial_t^\beta h_{jn}(x,t))$ とかく；$h_j : \mathbb{R}^n \times \omega \longmapsto \mathbb{R}^n$, $h_{ji} : \mathbb{R}^n \times \omega \longmapsto \mathbb{R}^n$ 。regularity については例えば $h_j \in C^p$ は component wise に C^p を意味する．線型偏微分作用素（m 階）についても通常の記号を用いる：

$$P = P(x, D_x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha,$$

$$P(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha \quad , \quad P_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi) = \partial_\xi^\alpha D_x^\beta P(x, \xi), \xi \in \mathbb{R}^n.$$

$f(x)$ を未知関数とする関数方程式

(2.1) $\sum_{j=1}^{k} a_j(x,t) f(h_j(x,t)) = F(x, f(l_1(x)), \cdots, f(l_s(x))) + b(x,t)$

，ここで $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^r$, を考える．

方程式 (2.1) に次のことを仮定する．

A-1° $a_j(x,t), b(x,t) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $j=1,\cdots,k$, $t \in \omega \subseteq \mathbb{R}^r$ で固定，ω 閉集合，

A-2° $a_j(x,t), b(x,t) \in C^m(\mathbb{R}^n \times \omega)$, $j=1,\cdots,k$,

A-3° 写像 $x \longmapsto y = h_j(x,t)$ は各 $t \in \omega$ を固定すれば $\mathbb{R}^n$ の diffeomorphisms, $j=1,\cdots,k$,

A-4° $h_j(x,t) \in C^m$,逆の $h_j^{-1}(x,t) \in C^m$ $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \omega$, $j=1,\cdots,k$,

A-5° $F(x, z_1, \cdots, z_s) \in C(\mathbb{R}^{n+s})$,

A-6° $l_j(x) \in C(\mathbb{R}^n)$, $j=1,\cdots,s$.

$f(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ が (2.1) の超関数の意味の解であるとは

(2.2) $\sum_{j=1}^{k} (a_j(x,t) f(h_j(x,t)), \phi(x))_x$

$$= (F(x, f(l_1(x)), \cdots, f(l_s(x)), \phi(x))_x + (b(x,t), \phi(x))_x .$$

C^∞-係数をもつ偏微分作用素 $P = P(x, D_x)$ が開集合 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ において準楕円的（hypoelliptic）であるとは、任意の $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ と

open subset $\Omega' \subset \Omega$ に対して $Pu \in C^\infty(\Omega')$ ならば $u \in C^\infty(\Omega')$ がなりたつことである。

ここで、我々の扱う問題に一般的わく組を与える定理をのべよう。

<u>定理 2.1</u>　方程式 (2.1) が仮定 A−1°〜A−6° をみたすものとする。更に、$h_j(x, t^0) \equiv x$ となる $t^0 \in \omega$ が存在し、

(2.3)　$Q(t, \partial_t)\left(\sum_{j=1}^{k} a_j(x,t) f(h_j(x,t))\right)\Big|_{t=t^0} = 0$

が $\mathbb{R}^n$ における準楕円型偏微分方程式であると仮定する。ただし $Q(t, \partial_t)$ は t についての偏微分作用素で、形式的に作用させるものとする。このとき (2.1) の連続解は C^∞ となり、L^1_{loc} の解は殆んどいたる所 C^∞-関数に等しい。

(2.1) において

(2.4)　$h_j(x,t) = x + \phi_j(t)$,　$j = 1, \cdots, k$,　ここで

A − 7°　$\phi_j(t) \in C^\infty(\omega)$,　$j = 1, \cdots, k$,　と仮定する,

のときに上の定理を更に具体的に応用することが出来る。

(2.5)　$\mathcal{L}_j(t) = \sqrt{a_j(x,t)}\ \phi_j'(t) \cdot \mathrm{grad}_x$,　$j = 1, \cdots, k$,

(2.6)　$\mathcal{L}_0(t) = 2 \sum_{j=1}^{k} \{ \partial_t a_j(x,t)\, \phi_j'(t) \cdot \mathrm{grad}_x$

$\quad - \left(\sqrt{a_j(x,t)}\, \phi_j'(t) \cdot \mathrm{grad}_x \sqrt{a_j(x,t)}\right) \phi_j'(t) \cdot \mathrm{grad}_x - a_j(x,t)\, \phi_j''(t) \cdot \mathrm{grad}_x \}$,

ここで $\phi_j'(t) = \frac{d}{dt}\phi_j(t)$,　• はベクトル空間の内積である。

また、$[\mathcal{L}_\mu(t), \mathcal{L}_\nu(t)]$ は $\mathcal{L}_\mu(t)$ と $\mathcal{L}_\nu(t)$ の commutator $\mathcal{L}_\mu(t)\mathcal{L}_\nu(t) - \mathcal{L}_\nu(t)\mathcal{L}_\mu(t)$ を表わす。

定理 2.2　$A-1^\circ, A-2^\circ, A-5^\circ \sim A-7^\circ$ を仮定する．もし $\phi_j(t^0) = 0$ と任意の x に対して $a_j(x,t^0) > 0$, $j=1,\cdots,k$, が成りたつような $t^0 \in \omega$（一点）が存在し，かつ $\mathcal{L}_{j_1}(t^0)$, $[\mathcal{L}_{j_2}(t^0), \mathcal{L}_{j_3}(t^0)]$, $[\mathcal{L}_{j_1}(t^0), [\mathcal{L}_{j_2}(t_0), \mathcal{L}_{j_3}(t^0)]]$, $\cdots$, $[\mathcal{L}_{j_1}(t^0), [\mathcal{L}_{j_2}(t^0), [\mathcal{L}_{j_3}(t^0), [\cdots, \mathcal{L}_{j_\nu}(t^0)]]\cdots]]$, $\cdots$, $j_\nu = 0,1,\cdots,k$, の中に各 $x \in \mathbb{R}^n$ について n 個の一次独立なものが存在すれば、定理 2.1 と同じ結論が成りたつ、

系（[10], Theorem 6.1, P.111）　定理 2.2 と同一の仮定の下で、$\{\phi'(t^0) : j=1,\cdots,k\}$ が $\mathbb{R}^n$ を張るならば、定理 2.1 と同じ結論が成りたつ．

(2.4) の上に更に

(2.7)　　$a_j(x,t) \equiv \mu_j$　, μ_j は正の定数, $j=1,\cdots,k$,

とする、

定理 2.3　$b(x,t)$ に対して $A-1^\circ$, $A-2^\circ$ を、そして $A-5^\circ \sim A-7^\circ$ を仮定する、もし　$\phi_j(t^0) = 0$, $j=1,\cdots,k$, かつ $\{\phi_j'(t^0) ; j=1,\cdots,k\}$ と $\sum_{j=1}^{k} \mu_j \phi_j(t^0)$ が $\mathbb{R}^n$ を張るならば、定理 2.1 と同じ結論が成りたつ．

3、準楕円性の十分条件　準楕円性は、偏微分方程式の走

関数解が古典的な解となるかどうかという問題から生じたものである。それ以来、準楕円性のための数多くの十分条件が求められて来た([5],[6],[11],[12])。ラプラス作用素やその一般化の楕円型作用素は、準楕円的である。熊之郷－谷口の結果[8]によると、次の退化型作用素も準楕円的である。

例. (1) $x=(x',x'')$, $x'=(x_1,\cdots,x_\nu)$, $x''=(x_{\nu+1},\cdots,x_n)$ とし $\Delta_{x'}$, $\Delta_{x''}$ をそれぞれ x', x'' についてのラプラス作用素とするとき、$x\in\mathbb{R}^n$ において

$$P=(-\Delta_{x'})^{\ell}+|x'|^{2k}(-\Delta_{x''})^{m}$$

は、任意の自然数 ℓ, m, k に対して準楕円的である。

(2) $x\in\mathbb{R}^2$; $x=(x_1,x_2)$ とし、

$$P_{\pm}=D_{x_1}\pm i x_1^{k}D_{x_2}^{\ell}$$

とするとき、"k＝偶数" か又は "k＝奇数で ℓ＝偶数" ならば $P_{\pm}$ は $\mathbb{R}^2$ で準楕円的である。

また Hörmander[6] は2階の偏微分作用素の準楕円性について次の十分条件を与えている。C^∞－係数をもつ2階偏微分作用素

(3.4) $$P=P(x,D_x)=\sum_{j=1}^{k}X_j^2+X_0+c,$$

ここで $X_0,X_1,\cdots,X_k$ は開集合 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ において実 C^∞－係数をもつ1階同次偏微分作用素

$$X_j=\sum_{\ell=1}^{n}a_{j\ell}(x)\partial_{x_\ell},\quad a_{j\ell}(x)\in C^\infty(\Omega)$$

$c \in C^\infty(\Omega)$ とする．$R[X_0, X_1, \cdots, X_k]$ を X_j, $[X_{j_1}, X_{j_2}]$, $[X_{j_1}, [X_{j_2}, X_{j_3}]]$, $\cdots$, $[X_{j_1}, [X_{j_2}, [X_{j_3}, [\cdots, X_{j_\mu}]]\cdots]$, $(j_\nu = 0, 1, \cdots, k)$ で張られるベクトル空間とする．このとき次の十分条件が成りたつ．

「$R[X_0, X_1, \cdots, X_k]$ が各点 $x_0 \in \Omega$ において n 個の一次独立な元をふくめば，P は Ω において準楕円的である」

4．定理の証明　$\psi(x,t) \in \mathcal{D}$ ($t \in \omega$ で固定) とし，$\mathrm{supp}_x \psi(x,t)$ を x についての support とする．また $\psi(\mathrm{supp}\,\phi, t) = \bigcup_{x \in \mathrm{supp}\,\phi} \psi(x,t)$, $\psi(\mathrm{supp}\,\phi, F) = \bigcup_{t \in F} \psi(\mathrm{supp}\,\phi, t)$, $\det \partial h_j^{-1}/\partial y = \det\left(\partial h_{j_i}^{-1}/\partial y_\mu;\ {i \downarrow 1, \cdots, n \atop j \to 1, \cdots, n}\right)$ という記号を用いる．

<u>定理 2.1 の証明</u>　$f(x)$ を $\mathbb{R}^n$ の関数である超関数とすると，関数列 $f_n(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ があって $\phi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\lim_{n \to \infty} (f_n(x), \phi(x))_x = (f(x), \phi(x))_x .$$

これから

$$\lim_{n \to \infty} (f_n(h_j(x,t)), \phi(x))_x = (f(h_j(x,t)), \phi(x))_x .$$

$F \subset \omega$：コンパクト集合に対して，$J = \bigcup_{t \in F} \mathrm{supp}_y \phi(h_j^{-1}(y,t))$ がコンパクトとなることを示そう．$t^0 \in F$ にとる．$h_j(\mathrm{supp}\,\phi, F)$ はコンパクトとなる．なぜならコンパクト集合 $\mathrm{supp}\,\phi \times F$ の h_j による連続像はコンパクトであるから．更に

$$h_j(\mathrm{supp}\,\phi, t) = \mathrm{supp}_y \phi(h_j^{-1}(y,t)) .$$

なぜならば，$y \in h_j(\mathrm{supp}\,\phi, t)$ に対して $\phi(x_\nu) \neq 0$　$\nu = 1, 2, \cdots$

$x_\nu \to x \quad (\nu\to\infty)$ となる列 $\{x_\nu\}$ が存在する。$y_\nu = h_j(x_\nu, t)$ とおくと、$y_\nu \to y = h_j(x,t) \quad (\nu\to\infty)$ となる。$x_\nu = h_j^{-1}(y_\nu, t)$ と $\phi(x_\nu) = \phi(h_j^{-1}(y_\nu,t)) \neq 0$ だから $y \in supp_y\,\phi(h_j^{-1}(y_\nu,t))$ がなりたつ。他方、$\bar{y} \in supp_y\,\phi(h_j^{-1}(y_\nu,t))$ に対して、$\phi(h_j^{-1}(\bar{y}_\nu,t)) \neq 0$ で $\bar{y}$ に収束する列 $\{\bar{y}_\nu\}, (\nu=1,2,\cdots)$ が存在する。$x_\nu = h_j^{-1}(\bar{y}_\nu, t)$ とおくと $\phi(x_\nu)\neq 0$ よって $\lim_{\nu\to\infty} h_j^{-1}(\bar{y}_\nu,t) = x$ は $supp\,\phi$ に属する。このことは $\bar{y} = h_j^{-1}(x,t)$ かつ $\bar{y} \in h_j(supp\,\phi, t)$ を意味する。よって $J = \bigcup_{t\in F} supp_y\,\phi(h_j^{-1}(y,t)) = \bigcup_{t\in F} h_j(supp\,\phi, t)$ はコンパクトが示された。このことから次の計算が可能である。

$$\lim_{m\to\infty}(f_n(y), \phi(h_j^{-1}(y,t))\,|\det \partial h_j^{-1}/\partial y|)_y$$

$$= (f(y), \phi(h_j^{-1}(y,t))\,|\det\partial h_j^{-1}/\partial y|)_y = (f(h_j(x,t)), \phi(x))_x .$$

これから (2.2) の両辺に ∂_t^g を作用出来て、

$$\partial_t^g \textstyle\sum_{j=1}^{k}(a_j(x,t) f(h_j(x,t)), \phi(x))_x = \sum_{j=1}^{k}\lim_{n\to\infty}\partial_t^g[(a_j(x,t) f_n(h_j(x,t)),$$

$$\phi(x))_x] = \textstyle\sum_{j=1}^{k}\lim_{n\to\infty}(f_n(y), (-\partial_t)^g[a_j(y)\phi^{-1}(h_j^{-1}(y,t))\,|\det\partial h_j^{-1}/\partial y|])_y$$

$$= \textstyle\sum_{j=1}^{k}(f(y), (-\partial_t)^g[a_j(y)\phi(h_j^{-1}(y,t))\,|\det\partial h_j^{-1}/\partial y|])_y$$

$$= \textstyle\sum_{j=1}^{k}(\partial_t^g[a_j(x,t) f(h_j(x,t)), \phi(x))_x .$$

かくして $\quad \sum_{j=1}^{k}(\partial_t^g[a_j(x,t) f(h_j(x,t))], \phi(x))_x = (\partial_t^g b(x,t), \phi(x))_x$

すなわち超関数の意味で

$$\partial_t^g\left(\textstyle\sum_{j=1}^{k} a_j(x,t) f(h_j(x,t))\right) = \partial_t^g b(x,t) .$$

このことから (2.2) の両辺に作用素 $Q(t,\partial_t)$ を施こせる。t

$=t^0$ とおいて、左辺が定理の仮定によって準楕円的な偏微分方程式 $Q(t^0,\partial_t)\left(\sum_{j=1}^{k} a_j(x,t^0)f(x)\right) = Q(t^0,\partial_t)\,b(x,t^0)$ を得る。このことから定理の結論が得られる。

<u>定理2.2の証明</u>　(2.1) において $h_j(x,t) = x + \phi_j(t)$ の場合を考え、定理2.1 の証明と同じ過程から ∂_t^2 を作用させることが出来て，$t=t^0$ とおけば，

(4.1)
$$\sum_{j=1}^{k} [\,a_j(x,t^0)(\phi_j'(t^0)\cdot \mathrm{grad}_x)^2 + 2\partial_t a_j(x,t)(\phi_j'(t^0)\cdot \mathrm{grad}_x) + a_j(x,t^0)(\phi_j''(t^0)\cdot \mathrm{grad}_x) + \partial_t^2 a_j(x,t^0)\,]\,f(x) = \partial_t^2\, b(x,t^0).$$

(2.5) と (2.6) から (4.1) は、次の形にかき表わせる。

(4.2)
$$\left[\sum_{j=1}^{k} \mathcal{L}_j^2(t^0) + \mathcal{L}_0(t^0)\right] f(x) = \partial_t^2\, b(x,t^0).$$

定理の仮定から、Hörmander の条件を満している ので結論を得ることが出来る。

<u>定理2.3 の証明</u>　$\mathcal{L}_j(t^0) = \sqrt{\mu_j}\,(\phi_j'(t^0)\cdot \mathrm{grad}_x)$, $j=1,\cdots,k$, $\mathcal{L}_0(t^0) = \sum_{j=1}^{k} \mu_j(\phi_j''(t^0)\cdot \mathrm{grad}_x)$ は定係数であるから、これらの commutator は消える。よって $R[\mathcal{L}_0(t^0), \mathcal{L}_1(t^0), \cdots, \mathcal{L}_k(t^0)]$ が n 個の一次独立な要素をふくむためには、$\{\sqrt{\mu_j}\,\phi_j'(t^0); j=1,\cdots,k\}$ と $\sum_{j=1}^{k}\mu_j\phi_j''(t^0)$ が R^n を張れば十分である。$\mu_j>0$, $j=1,\cdots,k$, 故、前者は $\{\phi_j'(t^0) : j=1,2,\cdots,k\}$ でおきかえられる。よ

って定理の結論を得る．

注意．定理2.2の系の仮定の下で(4.1)の主部は

$$P_0(x,\partial_x) = \sum_{j=1}^{k} [a(x,t^0)(\phi_j'(t^0)\cdot\mathrm{grad}_x]^2$$

で，この characteristic form は

$$P_0(x,\xi) = \sum_{j=1}^{k} [a(x,t^0)(\phi_j'(t^0)\cdot\xi)^2]$$

となり，$P_0(x,\xi)=0$ から $\xi=0$ が $\{\phi_j'(t^0) : j=1,\cdots,k\}$ と $a_j(x,t^0)>0$ から導かれる．よってこのときは $P_0(x,\partial_x)$ は elliptic である．

5．例と注意　初めの4例は定理2.1の応用である．

(1) Hazuki's equation [2]

$$4f(x_1,x_2) - f(x_1+t, x_2+t) - f(x_1-t, x_2+t) - f(x_1+t, x_2-t) - f(x_1-t, x_2-t) = 0,$$

これは (2.1) で $a_1(x,t)=4$, $a_j(x,t)=-1$, $j=2,\cdots,5$, $h_1(t,x)=x$, $h_2(x,t)=(x_1+t, x_2+t)$, $h_3(x,t)=(x_1-t, x_2+t)$, $h_4(x,t)=(x_1+t, x_2-t)$, $h_5(x,t)=(x_1-t, x_2-t)$, $F(x, f(l_1(x)),\cdots, f(l_5(x)))=0$ $b(x,t)=0$. ∂_t^2 を作用させると，$t=0$ とおくことによって

$$\Delta_x f(x) = 0.$$

Δ_x は elliptic よって hypo-elliptic.

(2) $f(x_1+t, x_2) + t^2 f(x_1, x_2+t) + (t-t^2+1) f(x_1, x_2)$

$= t(x_1^2+2x_1+t)$, および

$$f(x_1+t,x_2)+f(x_1-t,x_2)+f(x_1,x_2+t^2)+f(x_1,x_2+t^2)-4f(x_1,x_2)=0,$$

(see [10]). ∂_t^4 をこれらの方程式に作用させれば，$t=0$ とおくことによって、ある定数 $l>0$ に対して

$$\partial_{x_1}^4 f(x_1,x_2) + l\,\partial_{x_2}^2 f(x_1,x_2) = 0.$$

これは semi-elliptic，よって hypoelliptic.

次の結果は，定理2.1～2.3 を適用されうる新しい例と思う．

(3) $f(x_1-t,x_2)+f(x_1+t,x_2)+x_1^2f(x_1,x_2-t)+x_1^2f(x_1,x_2+t)$

$$= 2f(x_1,x_2)+2x_1^2f(x_1,x_2)+2[f(x_1,x_2)]^2+[f(x_1+x_2,x_1-x_2)]^2 - [f(x_1,x_1)]^2-[f(x_2,x_2)]^2$$

∂_t^2 を作用して $t=0$ とおくと

$$\partial_{x_1}^2 f(x_1,x_2) + x_1^2\partial_x^2 f(x_1,x_2) = 0.$$

作用素 $P(x,\partial_x) = \partial_{x_1}^2 + x_1^2\partial_{x_2}^2$ は，3節であげた hypoelliptic operator $P=(-\Delta_{x'})^l+|x'|^{2k}(-\Delta_{x''})^m$ の特別な場合である．

(4) $f(x_1+t,x_2)+i\,x_1^4 f(x_1,x_2+t)-2f(x_1,x_2)=0$.

∂_t を作用させて，$t=0$ とおけば

$$\partial_{x_1}f(x_1,x_2) + i\,x_1^4\,\partial_{x_2}f(x_1,x_2) = 0.$$

$P(x,\partial_x)=\partial_{x_1}+i\,x_1^4\partial_{x_2}^2$ は $P_\pm = D_{x_1}\pm i\,x_1^k D_{x_2}^l$ の特別な形である．

(5) $f(x_1+t,\, x_2) + f(x_1,\, x_2-\frac{1}{2}t^2) = 2f(x_1, x_2)$。 $\phi_1(t) = (t, 0)$,
$\phi_2(t) = (0, -\frac{1}{2}t^2)$, $t^0 = 0$ にとり, $\phi_1'(0)$, $\phi_2''(0)$ は $\mathbb{R}^2$ を張る.
定理2.3より連続解は C^∞ である.

(6) $f(x_1-t^2,\, x_2+t^2) = f(x_1, x_2)$, $\phi_1(t) = (-t^2, t^2)$ とすると
$\phi_1''(-2, 2)$ は定理2.3の条件を満さない。一方 $f = f(x_1, x_2)$ は

$$(-\partial_{x_1} + \partial_{x_2})f = 0$$

を満す．この解は必ずしも C^∞ とはならぬ．

注．定理2.3で $\{\phi_j'(t^0);\, j=1,\cdots,k\}$ が $\mathbb{R}^n$ を張らないとき，
$\{\phi_j''(t^0);\, j=1,\cdots,k\}$ が $\mathbb{R}^n$ を張れば定理の結論が成り立つかどうかは今の所分っていない。

Reference

[1] J. Aczél : Lectures on functional equations and their applications, Math. in Sci. and Engineering, Vol. 19, Academic Press, New york and London, 1966.

[2] J. Aczél, H. Haruki, M. A. Mckiernan, and G. N. Sakovič, General and regular solutions of functional equations characterizing harmonic polynomials, Aequationes Math. 1 (1968), 37–53.

[3] L. Flatto : Functions with a mean value property II, Amer. J. Math. 85 (1963), 248–270.

[4] A. Friedman and W. Littman : Functions satisfying the mean value property, Trans. Amer. Math. Soc. 102 (1962), 167–180.

[5] L. Hörmander : Pseudodifferential operators and hypoelliptic equations, Proc. Symp. on Singlar Integrals, Amer. Math. Soc. 10 (1967), 138–183.

[6] L. Hörmander : Hypoelliptic second order differential equations, Acta Math. 119 (1969), 147–171.

[7] S. Kakutani and M. Nagumo : About the functional equation $\sum_{\nu=0}^{n-1} f(z+e^{(2\nu\pi/n)i}\xi)=nf(z)$ (In Japanese), Zenkoku Shijo Danwakai 66 (1935), 10–12.

[8] H. Kumano-go and K. Taniguchi : Oscillatory integrals of

symbols of pseudodifferential operators on $\mathbb{R}^n$ and operator of Fredholm type, Proc. Japan Acad. 49 (1973), 397-402.

[9] L. Schwartz : Theorie des distributions, Herman, Paris, 1966.

[10] H. Światak : The regularity of the locally integrable and continuous solutions of non-linear functional equations, Trans. Amer. Math. Soc. 221 (1976), 97-118.

[11] F. Treves : Operateurs differentiels hypoelliptiques, Ann. Inst. Fourier 9 (1959), 1-73.

[12] A. Tsutsumi : On the asymptotic behavior of resolvent kernels and spectral functions for some class of hypoelliptic operators, J. Differential Equations 18 (1975), 366-385.

[13] A. Tsutsumi and S. Haruki : Functional Equations and hypoellipticity, Proc. Japan Acad. 58 (1982), Ser. A, 105-108.

[14] A. Tsutsumi and S. Haruki: The regularity of solutions of functional equations and hypoellipticity, Supplement to the Proc. of the 2nd World Conf. on Math. at the Service of Man. 1982, Las Palmas, Spain.

[15] J. L. Walsh: A mean value theorem for polynomials and harmonic polynomials, Bull. Amer. Math. Soc. 42 (1936), 923-930.

[16] L. Zalkman : Mean values and differential equations, Israel J. Math. 14 (1973), 339-352.